

Ficha de trabalho. Matemática A 12.º ano

Probabilidade. Análise combinatória.

Fonte: <http://www.gave.min-edu.pt/> . Compilação por explicamat

1.

Exame nacional 2014 – época especial

Seja Ω , conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- A e \bar{A} são acontecimentos equiprováveis;
- A e B são acontecimentos independentes.

Mostre que $2P(A \cup B) = 1 + P(B)$

2.

Exame nacional 2014 – 2.ª fase

Seja Ω , conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(A) = 0,4$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,48$

Qual é o valor de $P(B)$?

- (A) 0,08 (B) 0,12 (C) 0,2 (D) 0,6

3.

Exame nacional 2014 – 1.ª fase

Seja Ω , conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,4$
- $P(A \cap B) = 0,2$
- $P(B | \bar{A}) = 0,8$

Qual é o valor de $P(B)$?

- (A) 0,28 (B) 0,52 (C) 0,68 (D) 0,80

4.

Teste intermédio – Novembro de 2013

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

Qual é o valor de $P(\bar{A} \cup (A \cap \bar{B}))$?

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

Na Figura 3, está representada uma planificação de um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas com os números -1 , 1 , 2 e 3

Considere a experiência aleatória que consiste em lançar esse dado duas vezes consecutivas e registar, após cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

A : «o número registado no primeiro lançamento é negativo»

B : «o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo»

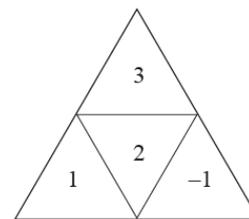


Figura 3

Elabore uma composição, na qual indique o valor de $P(A | B)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta, explique o significado de $P(A | B)$ no contexto da situação descrita, explique o número de casos possíveis, explique o número de casos favoráveis e apresente o valor de $P(A | B)$

Escolhe-se, ao acaso, um professor de uma certa escola secundária. Sejam A e B os acontecimentos:

A : «o professor escolhido é do sexo masculino»

B : «o professor escolhido ensina Matemática»

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,44$
- $P(A \cup \overline{B}) = 0,92$

Qual é a probabilidade de o professor escolhido ensinar Matemática, sabendo que é do sexo feminino?

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{7}$

(D) $\frac{1}{8}$

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- A e B são incompatíveis;
- $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$

Mostre que as probabilidades $P(A)$, $P(A | B)$ e $P(\overline{B} | A)$ são todas diferentes e escreva-as por ordem crescente.

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,3$
- $P(\overline{B}) = 0,6$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,4$

Averigue se os acontecimentos A e B são independentes.

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$)

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,3$
- $P(\overline{A} \cap B) = 0,55$
- A e B são acontecimentos incompatíveis.

Qual é o valor de $P(\overline{A} \cap \overline{B})$?

- (A) 0,85 (B) 0,25 (C) 0,15 (D) 0

Uma empresa produz apenas dois tipos de lâmpadas: lâmpadas fluorescentes e lâmpadas LED (Díodos Emissores de Luz).

As lâmpadas de cada tipo podem ter a forma tubular ou ser compactas.

Sabe-se que:

- 55% das lâmpadas produzidas nessa empresa são fluorescentes;
- das lâmpadas fluorescentes produzidas nessa empresa, 50% têm a forma tubular;
- das lâmpadas LED produzidas nessa empresa, 90% são compactas.

Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

Na Figura 3, está representado um dado cúbico, não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 3, em que faces opostas têm o mesmo número.

Lança-se o dado uma única vez e observa-se o número da face voltada para cima.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

A : «sair número ímpar»

B : «sair número menor do que 3»

Sabe-se que:

- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9}$
- $P(B|A) = \frac{2}{7}$

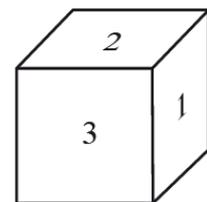


Figura 3

Determine a probabilidade de sair o número 3

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(B) = \frac{1}{4}$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{15}{16}$
- $P(A|\overline{B}) = \frac{7}{12}$

Determine $P(A)$

Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro regular $[ABCDEF]$, cujos vértices pertencem aos eixos coordenados.

a) Escolhem-se ao acaso dois vértices distintos do octaedro.

Qual é a probabilidade de a reta definida por esses dois vértices ser paralela à reta definida por $x = 1 \wedge y = 2$?

Apresente o resultado na forma de fração.

b) Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos vértices do octaedro.

Sejam X e Y os acontecimentos seguintes.

X : «o vértice escolhido pertence ao plano definido por $y = 0$ »

Y : «a soma das coordenadas do vértice escolhido é positiva»

Averigüe se os acontecimentos X e Y são independentes. Justifique.

Na sua justificação, deve indicar os vértices que pertencem a cada um dos acontecimentos X , Y e $X \cap Y$

c) Admita agora que a face $[ABC]$ do octaedro está numerada com o número 1, como se observa na Figura 2.

Pretende-se numerar as restantes faces do octaedro com os números de 2 a 8 (um número diferente em cada face).

De quantas maneiras diferentes se podem numerar as restantes sete faces, de modo que, depois de o octaedro ter todas as faces numeradas, pelo menos três das faces concorrentes no vértice A fiquem numeradas com números ímpares?

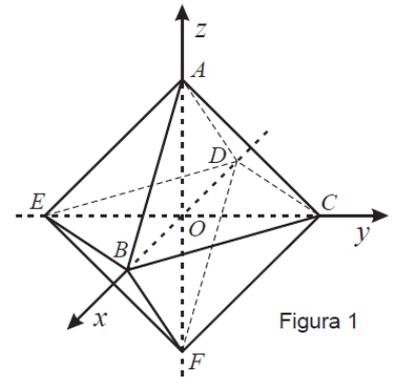


Figura 1

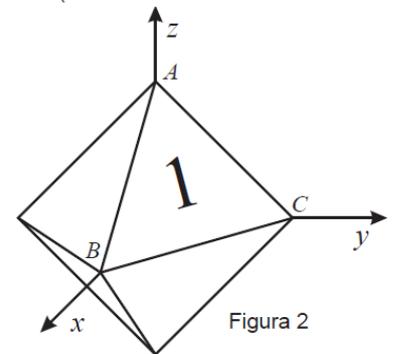


Figura 2

Numa turma com 15 raparigas e 7 rapazes, vai ser formada uma comissão com 5 elementos. Pretende-se que essa comissão seja mista e que tenha mais raparigas do que rapazes.

Quantas comissões diferentes se podem formar?

- (A) ${}^{15}A_3 + {}^{15}A_4$ (B) ${}^{15}C_3 \times {}^7C_2 + {}^{15}C_4 \times 7$ (C) ${}^{15}C_3 \times {}^7C_2 \times {}^{15}C_4 \times 7$ (D) ${}^{22}C_3 \times {}^{19}C_2$

Na Figura 1, está representado um tabuleiro quadrado dividido em dezasseis quadrados iguais, cujas linhas são A, B, C e D e cujas colunas são 1, 2, 3 e 4. O João tem doze discos, nove brancos e três pretos, só distinguíveis pela cor, que pretende colocar no tabuleiro, não mais do que um em cada quadrado.

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

Figura 1

De quantas maneiras diferentes pode o João colocar os doze discos nos dezasseis quadrados do tabuleiro?

- (A) ${}^{16}C_{12}$ (B) ${}^{16}C_9 \times {}^7C_3$ (C) ${}^{16}A_{12}$ (D) ${}^{16}A_9 \times {}^7A_3$

Num grupo de nove pessoas, constituído por seis homens e três mulheres, vão ser escolhidos três elementos para formarem uma comissão.

Quantas comissões diferentes se podem formar com exatamente duas mulheres?

- (A) 3C_2 (B) $6 \times {}^3C_2$ (C) 9A_3 (D) $6 \times {}^3A_2$

Uma caixa contém apenas bolas brancas e bolas pretas, indistinguíveis ao tato.

Todas as bolas estão numeradas com um único número natural.

Sabe-se que:

- duas bolas em cada cinco são pretas;
- 20% das bolas pretas têm um número par;
- 40% das bolas brancas têm um número ímpar.

a) Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa.

Determine a probabilidade de essa bola ser preta, sabendo que tem um número par.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

b) Admita agora que a caixa tem n bolas.

Extraem-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Determine n , sabendo que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é igual a $\frac{7}{20}$

Considere todos os números que se podem obter alterando a ordem dos algarismos do número 12345

Quantos desses números são ímpares e maiores do que 40000 ?

- (A) 18 (B) 30 (C) 120 (D) 240

Os três irmãos Andrade e os quatro irmãos Martins vão escolher, de entre eles, dois elementos de cada família para um jogo de matraquilhos, de uma família contra a outra.

De quantas maneiras pode ser feita a escolha dos jogadores de modo que o Carlos, o mais velho dos irmãos da família Andrade, seja um dos escolhidos?

- (A) 8 (B) 12
(C) 16 (D) 20

Relativamente a uma turma de 12.º ano, sabe-se que:

- o número de rapazes é igual ao número de raparigas;
- $\frac{3}{4}$ dos alunos pretendem frequentar um curso da área de saúde e os restantes alunos pretendem frequentar um curso da área de engenharia;
- dos alunos que pretendem frequentar um curso da área de engenharia, dois em cada sete são raparigas.

a) Escolhe-se, ao acaso, uma rapariga da turma.

Qual é a probabilidade de essa rapariga pretender frequentar um curso da área de saúde?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

b) Escolhem-se, ao acaso, dois alunos da turma para estarem presentes nas comemorações do aniversário da escola.

Sabe-se que a probabilidade de esses dois alunos serem rapazes é $\frac{13}{54}$

Seja n o número de rapazes da turma.

Determine o valor de n

Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação, sem utilizar a calculadora.

Considere a linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20

Escolhendo, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser par?

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

Um dos termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} + x\right)^{10}$, com $x \neq 0$, não depende da variável x . Qual é esse termo?

- (A) 10 240 (B) 8064 (C) 1024 (D) 252

A soma de todos os elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é igual a 256

Qual é o terceiro elemento dessa linha?

- (A) 28 (B) 36 (C) 56 (D) 84

Do desenvolvimento de $(x^2 + 2)^6$ resulta um polinómio reduzido.

Qual é o termo de grau 6 desse polinómio?

- (A) $8x^6$ (B) $20x^6$ (C) $64x^6$ (D) $160x^6$

Considere a linha do triângulo de Pascal em que o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento é 484.

Qual é a probabilidade de escolher, ao acaso, um elemento dessa linha que seja superior a 1000?

- (A) $\frac{15}{23}$ (B) $\frac{6}{11}$ (C) $\frac{17}{23}$ (D) $\frac{8}{11}$

Uma caixa tem seis bolas distinguíveis apenas pela cor: duas azuis e quatro pretas.

- a)** Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, todas as bolas da caixa. À medida que são retiradas da caixa, as bolas são colocadas lado a lado, da esquerda para a direita.

Determine a probabilidade de as duas bolas azuis ficarem uma ao lado da outra.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

- b)** Considere a caixa com a sua composição inicial.

Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas.

Seja X a variável aleatória «número de bolas azuis que existem no conjunto das três bolas retiradas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

Uma caixa tem nove bolas distinguíveis apenas pela cor: seis pretas, duas brancas e uma amarela.

- a)** Considere a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas.

Determine a probabilidade de as bolas retiradas não terem todas a mesma cor.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

- b)** Considere a caixa com a sua composição inicial.

Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa uma bola de cada vez, ao acaso e sem reposição, até ser retirada uma bola preta.

Seja X a variável aleatória «número de bolas retiradas dessa caixa».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	2	4
$P(X = x_i)$	a	b	0,3

Sabe-se que:

- a e b designam números reais positivos;
- o valor médio da variável X é igual a 2,2

Qual é o valor de a ?

- (A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4

Numa caixa, estão cinco bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 5

- a)** De quantas maneiras diferentes se podem colocar, lado a lado, as cinco bolas, de modo que as bolas com os números 3 e 4 fiquem ao lado uma da outra?
- b)** Considere a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso e em simultâneo três bolas da caixa e observar os seus números.

Sejam X e Y as variáveis aleatórias seguintes.

X : «número de bolas retiradas com número ímpar»

Y : «soma dos números das bolas retiradas»

- b.1)** Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X

Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

- b.2)** Determine $P(Y < 10 | X = 1)$, sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada.

A sua resposta deve incluir:

- o significado de $P(Y < 10 | X = 1)$, no contexto da situação descrita;
- a apresentação dos casos possíveis que considerou;
- a apresentação dos casos favoráveis;
- o valor da probabilidade pedida.

A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	a	$2a$	b	b

Sabe-se que:

- a e b são números reais;
- $P(X > 1) = P(X < 2)$

Qual é o valor médio da variável aleatória X ?

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{17}{9}$ (D) $\frac{19}{12}$

Um saco contém quatro bolas com o número 0, uma bola com o número 2 e duas bolas com o número 3

- a) Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco.

Seja X a variável aleatória «produto dos números das duas bolas retiradas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X

Apresente cada uma das probabilidades na forma de fração irredutível.

- b) Considere agora a experiência que consiste em retirar, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, **todas** as bolas do saco.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

A : «Não saem bolas com o número 0 em extrações consecutivas»

B : «A segunda bola retirada tem o número 2»

Determine $P(B | A)$, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Numa pequena composição, justifique a sua resposta.

A sua composição deve contemplar:

- o significado de $P(B | A)$, no contexto da situação descrita;
- a explicação da ordem de saída das bolas com o número 0
- a explicação do número de casos possíveis;
- a explicação do número de casos favoráveis;
- a apresentação do valor da probabilidade na forma de fração.

Numa conferência de imprensa, estiveram presentes 20 jornalistas.

- a) Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos 20 jornalistas presentes nessa conferência de imprensa.

Seja X a variável aleatória «número de jornalistas do sexo feminino escolhidos».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Considere agora a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, dois dos 20 jornalistas presentes nessa conferência de imprensa.

Seja Y a variável aleatória «número de jornalistas do sexo feminino escolhidos».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável Y

Apresente as probabilidades na forma de fração.

- b) Considere o problema seguinte.

«Admita que a conferência de imprensa se realiza numa sala, cujas cadeiras se encontram dispostas em cinco filas, cada uma com oito cadeiras. Todos os jornalistas se sentam, não mais do que um em cada cadeira, nas três primeiras filas.

De quantas maneiras diferentes se podem sentar os 20 jornalistas, sabendo que as duas primeiras filas devem ficar totalmente ocupadas?»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.

Resposta I) ${}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^8A_4$

Resposta II) ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^8A_4$

Numa composição, apresente os raciocínios que conduzem a cada uma dessas respostas.

O João tem uma coleção de dados, uns com a forma de um cubo (dados cúbicos) e os outros com a forma de um octaedro (dados octaédricos).

- a) Os dados cúbicos são equilibrados e têm as faces numeradas de 1 a 6

O João lança oito vezes um dos dados cúbicos.

Qual é a probabilidade de a face com o número 1 sair pelo menos duas vezes?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

- b) Alguns dados da coleção do João são verdes e os restantes são amarelos.

Sabe-se que:

- 10% dos dados da coleção são amarelos;
- o número de dados cúbicos é igual ao triplo do número de dados octaédricos;
- 20% dos dados amarelos são cúbicos.

O João seleciona ao acaso um dos dados da coleção e verifica que é verde.

Qual é a probabilidade de esse dado ser octaédrico?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Num saco estão doze bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 12.

a) O João retira três bolas do saco, ao acaso, de uma só vez.

Seja X a variável aleatória «número de bolas retiradas com um número múltiplo de 5».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

b) Considere agora o saco com a sua constituição inicial.

O João retira, ao acaso, uma bola do saco, regista o número da bola retirada e repõe essa bola no saco.

Em seguida, retira, ao acaso, uma segunda bola do saco, regista o número da bola retirada e repõe essa bola no saco, e assim sucessivamente, até registar uma série de 8 números.

Considere a afirmação seguinte:

«A probabilidade de o João registar exatamente 5 números que sejam múltiplos de 3 é dada

por $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times {}^8C_5$, aplicando o modelo binomial.»

Elabore uma composição na qual:

- apresente um raciocínio que justifique a veracidade da afirmação;
- refira as condições de aplicabilidade do modelo binomial.

Uma variável aleatória X tem distribuição normal.

Sabe-se que $P(X > 40)$ é inferior a $P(X < 30)$

Qual dos números seguintes pode ser o valor médio da variável aleatória X ?

- (A) 32 (B) 35 (C) 38 (D) 41

As classificações obtidas pelos alunos de uma escola num teste de Português seguem, aproximadamente, uma distribuição normal, de valor médio 11,5 valores. Vai ser escolhido, ao acaso, um desses testes. Considere os acontecimentos seguintes.

I : «a classificação do teste é superior a 12 valores»

J : «a classificação do teste é superior a 16,5 valores»

K : «a classificação do teste é inferior a 9 valores»

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $P(J) < P(K) < P(I)$ (B) $P(K) < P(I) < P(J)$ (C) $P(I) < P(K) < P(J)$ (D) $P(K) < P(J) < P(I)$

Considere uma variável aleatória X com distribuição normal de valor médio 11 e desvio padrão σ . Sabe-se que σ é um número natural e que $P(X > 23) \approx 0,02275$

Qual é o valor de σ ?

- (A) 12 (B) 11 (C) 6 (D) 4

