Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 24.01.2008

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Num referencial o. n. $Oxyz$, sejam α e β os planos definidos pelas equações:

$\alpha : x + y - z = 1$ e $\beta : 2x + 2y - 2z = 1$

A intersecção dos planos α e β é

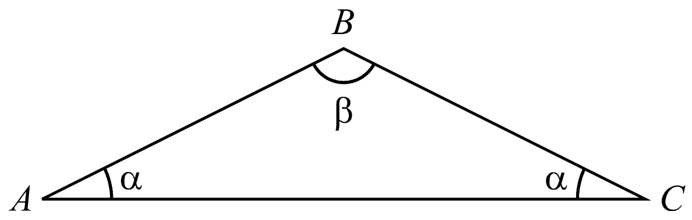
(A) o conjunto vazio

(B) um ponto

(C) uma recta

(D) um plano

2. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$ com dois ângulos de amplitude α e um ângulo de amplitude β.



Qual das igualdades seguintes é verdadeira, para qualquer triângulo nestas condições?

(A) $\cos \beta = \operatorname{sen}(2\alpha)$

(B) $\cos \beta = \cos(2\alpha)$

(C) $\cos \beta = -\operatorname{sen}(2\alpha)$

(D) $\cos \beta = -\cos(2\alpha)$

3. Seja θ um valor pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Qual das expressões seguintes designa um número real positivo?

(A) $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$

(B) $\operatorname{sen}\theta \times \cos\theta$

(C) $\operatorname{sen}\theta \times \operatorname{tg}\theta$

(D) $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{tg}\theta$

4. Considere a equação $1 + 3\,\mathrm{tg}\,(2x) = 4$

Qual dos seguintes valores é solução desta equação?

(A) $-\frac{\pi}{8}$ **(B)** $\frac{3\pi}{8}$ **(C)** $\frac{5\pi}{8}$ **(D)** $\frac{7\pi}{8}$

5. Considere o seguinte problema:

Uma frutaria confecciona dois tipos de bebidas com sumo de laranja e sumo de manga.

Bebida X : com um litro de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.

Bebida Y : com dois litros de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.

Para confeccionar estas bebidas, a frutaria dispõe diariamente de 12 litros de sumo de laranja e de 10 litros de sumo de manga. Cada litro de bebida X dá um lucro de 4 euros e cada litro de bebida Y dá um lucro de 5 euros. Supondo que a frutaria vende diariamente toda a produção destas bebidas, quantos litros de bebida X e quantos litros de bebida Y deve confeccionar por dia, para maximizar o lucro?

Sendo x o número de litros de bebida *X* e sendo y o número de litros de bebida *Y*, qual das opções seguintes traduz correctamente este problema?

(A) Maximizar $4x + 5y$ sujeito a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3} \leq 12 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} \leq 10 \end{cases}$$

(B) Maximizar $12x + 10y$ sujeito a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3} \leq 5 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} \leq 4 \end{cases}$$

(C) Maximizar $4x + 5y$ sujeito a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 12 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

(D) Maximizar $12x + 10y$ sujeito a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 5 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

Grupo II

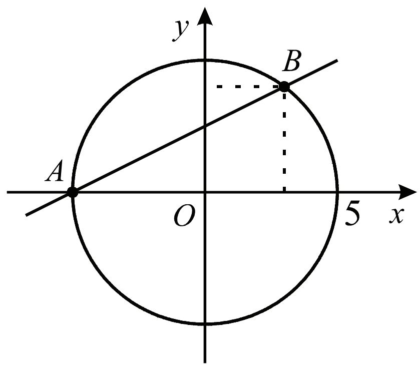
Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Na figura estão representadas, em referencial o. n. xOy, uma recta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5

Os pontos A e B pertencem à circunferência.

O ponto A também pertence ao eixo das abcissas.



1.1. Admitindo que o declive da recta AB é igual a $\frac{1}{2}$, resolva as três alíneas seguintes:

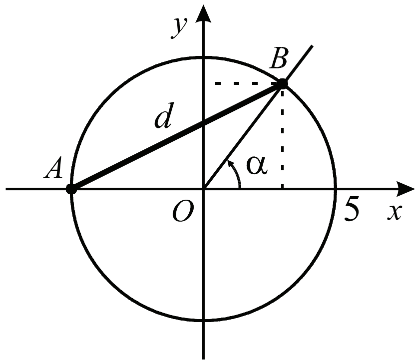
1.1.1. Mostre que uma equação da recta AB é $x - 2y + 5 = 0$

1.1.2. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(3, 4)$

1.1.3. Seja C o ponto de coordenadas $(-3, 16)$
Verifique que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em B

1.2. Admita agora que o ponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.

Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}B$



Seja d o comprimento do segmento $[AB]$

1.2.1. Mostre que $d^2 = 50 + 50\cos\alpha$

1.2.2. Para uma certa posição do ponto B, tem-se $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{24}$
Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de d

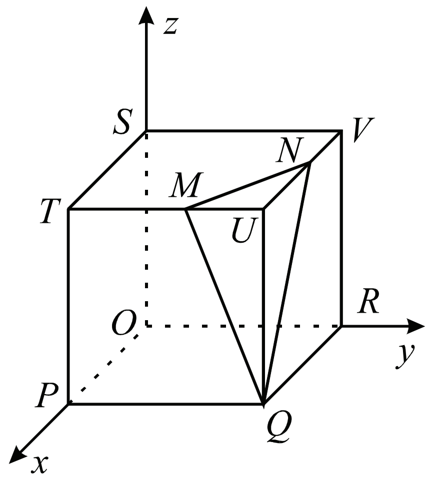
2. Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cubo $[OPQRSTUV]$ de aresta 5

O vértice O do cubo coincide com a origem do referencial.

Os vértices P, R e S do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respectivamente.

O triângulo escaleno $[MNQ]$ é a secção produzida no cubo pelo plano α de equação

$$10\,x + 15\,y + 6\,z = 125$$



2.1. Escreva uma condição que defina a recta que passa por U e é perpendicular ao plano α

2.2. Seja β a amplitude, em **graus**, do ângulo MQN. Determine β

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Sugestão: comece por determinar as coordenadas dos pontos M e N

FIM

COTAÇÕES

Grupo I .... **50 pontos**

Cada resposta certa .... 10 pontos
Cada resposta errada... 0 pontos
Cada item não respondido ou anulado .... 0 pontos

Grupo II .... **150 pontos**

1. .... 105 pontos
- **1.1.** ....55 pontos
  - **1.1.1.** ....15 pontos
  - **1.1.2.** ....20 pontos
  - **1.1.3.** ....20 pontos
- **1.2.** ....50 pontos
  - **1.2.1.** ....25 pontos
  - **1.2.2.** ....25 pontos

2. .... 45 pontos
- **2.1.** ....20 pontos
- **2.2.** ....25 pontos

TOTAL .... **200 pontos**