

# Matemática 11.º ano.

## Geometria

Compilação de todos os exercícios de Geometria saídos em provas oficiais (Testes Intermédios) desde 2006.

Todos os exercícios estão resolvidos em vídeo em [www.explicamat.pt](http://www.explicamat.pt)

### Teste Intermédio Março de 2013

1. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , considere um ponto  $P$  que tem ordenada igual a  $-4$  e cota igual a  $1$ . Considere também o vetor  $\vec{u}$  de coordenadas  $(2, 3, 6)$ . Sabe-se que os vetores  $\vec{OP}$  e  $\vec{u}$  são perpendiculares.
- Qual é a abcissa do ponto  $P$ ?
- (A) 1 (B) 2  
(C) 3 (D) 4

### Teste Intermédio Março de 2013

2. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a reta definida por  $\begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$ .
- Qual das equações seguintes define um plano perpendicular a esta reta?
- (A)  $x + y - z = 5$  (B)  $x + y + 2z = 5$   
(C)  $x - y = 5$  (D)  $x + y = 5$

### Teste Intermédio Março de 2013

3. Na Figura 4, está representado um quadrado  $[ABCD]$  de lado igual a  $4$ . Admita que o ponto  $E$  pertence ao segmento  $[AB]$  e que o triângulo  $[ADE]$  tem área igual a  $6$ .
- Determine o valor exato de  $\vec{ED} \cdot \vec{DC}$ , sem recorrer à calculadora.

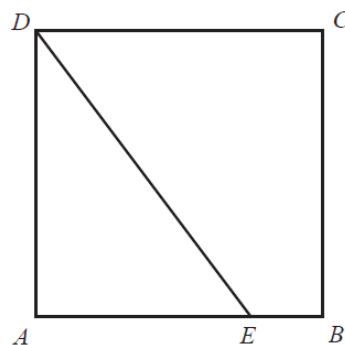


Figura 4

4. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o cubo  $[ABCDEFGH]$  (o ponto  $E$  não está representado na figura).

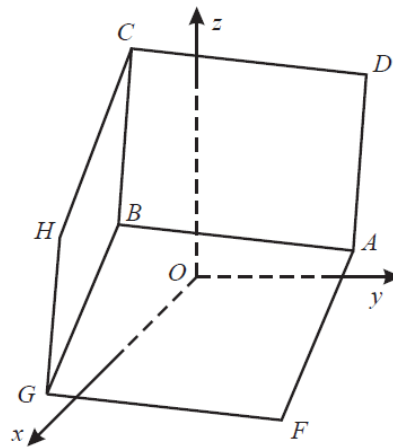


Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto  $F$  tem coordenadas  $(1, 3, -4)$
- o vetor  $\overrightarrow{FA}$  tem coordenadas  $(2, 3, 6)$

- 4.1 Escreva uma condição cartesiana que defina cada um dos seguintes conjuntos de pontos.

4.1.1. Plano  $FGH$

4.1.2. Reta  $AF$

4.1.3. Superfície esférica de centro no ponto  $F$  à qual pertence o ponto  $G$

- 4.2. Sabe-se ainda que a equação  $6x + 2y - 3z + 25 = 0$  define o plano  $HCD$

Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto  $E$  (vértice do cubo, não representado na figura).

5. Num referencial o.n.  $xOy$ , considere a circunferência definida por  $x^2 + y^2 = 5$

A reta  $r$  é tangente à circunferência no ponto de coordenadas  $(1, 2)$

Qual é o declive da reta  $r$ ?

- (A)  $-2$       (B)  $-\frac{1}{2}$       (C)  $\frac{1}{2}$       (D)  $2$

6. Seja  $a$  um número real.

Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a reta  $s$  e o plano  $\beta$  definidos, respetivamente, por  $(x,y,z) = (-1,0,3) + k(1,1,-1)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  e  $3x + 3y + az = 1$

Sabe-se que a reta  $s$  é paralela ao plano  $\beta$

Qual é o valor de  $a$  ?

- (A)  $-3$       (B)  $1$       (C)  $3$       (D)  $6$

7. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a pirâmide quadrangular regular  $[ABCDE]$

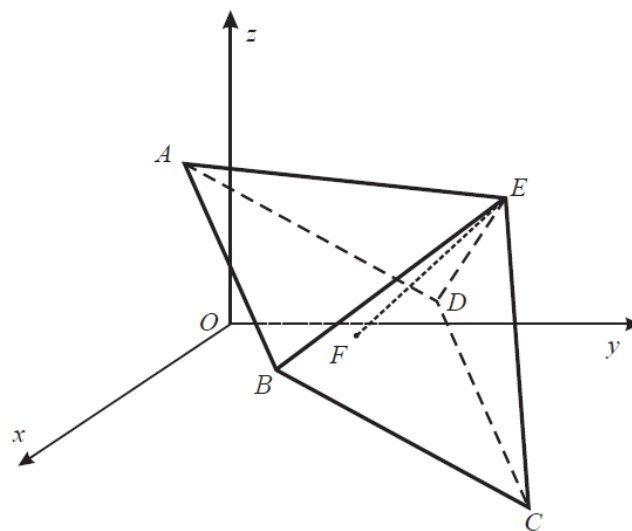


Figura 4

Seja  $F$  o centro da base da pirâmide.

Sabe-se que:

- o ponto  $F$  tem coordenadas  $(-2, 1, -1)$
- o vetor  $\overrightarrow{FE}$  tem coordenadas  $(-1, 2, 2)$
- a reta  $EA$  é definida pela condição  $(x,y,z) = (-3, 3, 1) + k(1, -5, 1)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

- 7.1. Escreva uma condição cartesiana que defina a reta  $EA$

**Nota** – Não necessita de apresentar cálculos.

- 7.2 Mostre que o plano  $ABC$  pode ser definido pela equação  $x - 2y - 2z + 2 = 0$

- 7.3 Sabe-se que a condição  $\begin{cases} x - y = -6 \\ y - z = 2 \end{cases}$  define a reta  $ED$

Determine, **sem recorrer à calculadora**, as coordenadas do ponto  $D$

8. No referencial o.n.  $xOy$  da Figura 6, estão representados o quadrado  $[OABC]$  e o retângulo  $[OPQR]$

Os pontos  $A$  e  $P$  pertencem ao semieixo positivo  $Ox$  e os pontos  $C$  e  $R$  pertencem ao semieixo positivo  $Oy$

O ponto  $Q$  pertence ao interior do quadrado  $[OABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{OA} = a$
- $\overline{OP} = b$
- $\overline{RC} = b$

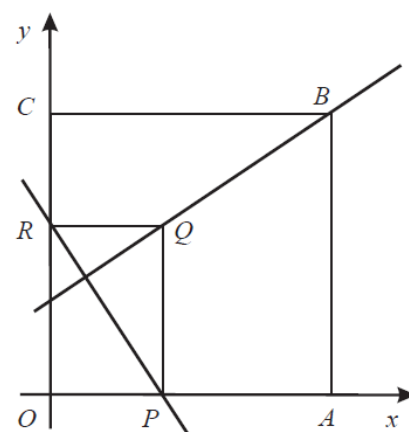


Figura 6

Prove que as retas  $QB$  e  $RP$  são perpendiculares.

9. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a recta  $r$  definida por

$$(x, y, z) = (3, 4, 5) + k(1, 0, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

Qual das condições seguintes define uma recta **paralela** à recta  $r$ ?

- (A)  $y = 5 \wedge z = 6$
- (B)  $x = 3 \wedge y = 4$
- (C)  $(x, y, z) = (1, 0, 0) + k(3, 4, 5), \quad k \in \mathbb{R}$
- (D)  $(x, y, z) = (3, 4, 5) + k(0, 1, 0), \quad k \in \mathbb{R}$

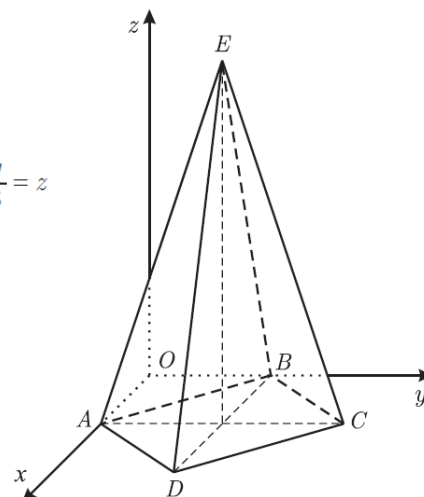
10. Na figura, está representada, num referencial o.n.  $Oxyz$ , uma pirâmide quadrangular regular  $[ABCDE]$  cuja base está contida no plano  $xOy$

Sabe-se que:

- o vértice  $A$  tem coordenadas  $(1, 0, 0)$
- o vértice  $B$  tem coordenadas  $(0, 1, 0)$
- o plano  $DCE$  é perpendicular à recta definida pela condição  $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = z$

Determine o volume da pirâmide.

**Nota** – Pode ser-lhe útil determinar uma equação do plano  $DCE$



11. De um triângulo isósceles  $[ABC]$  sabe-se que:

- os lados iguais são  $[AB]$  e  $[AC]$ , tendo cada um deles 8 unidades de comprimento;
- cada um dos dois ângulos iguais tem  $30^\circ$  de amplitude.

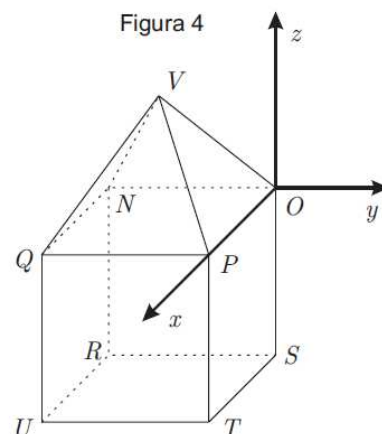
Qual é o valor do produto escalar  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ?

- (A)  $-32\sqrt{3}$       (B)  $-32$       (C)  $64$       (D)  $64\sqrt{3}$

12. Na Figura 4, está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , o poliedro  $[VNOPQRST]$ , que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano  $xOy$
- o ponto  $P$  pertence ao eixo  $Ox$
- o ponto  $U$  tem coordenadas  $(4, -4, -4)$
- o plano  $QTV$  é definido pela equação  $5x + 2y + 2z = 12$



12.1. Para cada um dos seguintes conjuntos de pontos, escreva uma **condição cartesiana** que o defina.

12.1.1 Plano paralelo ao plano  $QTV$  e que passa na origem do referencial.

12.1.2 Plano perpendicular à recta  $QN$  e que passa no ponto  $V$

12.1.3 Recta perpendicular ao plano  $QTV$  e que passa no ponto  $U$

12.1.4 Superfície esférica de centro em  $U$  e que passa no ponto  $T$

12.2. Considere um ponto  $A$ , com a mesma abcissa e com a mesma ordenada do ponto  $U$

Sabe-se que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OT} = 8$

Determine a cota do ponto  $A$

12.3. Determine o volume do poliedro  $[VNOPQRST]$

13. Na Figura 5, está representado o quadrado  $[ABCD]$

Sabe-se que:

- o ponto  $I$  é o ponto médio do lado  $[DC]$
- o ponto  $J$  é o ponto médio do lado  $[BC]$

Prove que  $\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \left\| \vec{AB} \right\|^2$

**Sugestão:** comece por exprimir cada um dos vectores  $\vec{AI}$  e  $\vec{AJ}$  como soma de dois vectores.

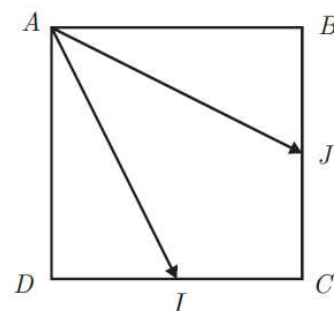


Figura 5

14. Seja  $[AB]$  um diâmetro de uma esfera de centro  $C$  e raio 4

Qual é o valor do produto escalar  $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ ?

- (A) 16                      (B) -16                      (C)  $4\sqrt{2}$                       (D)  $-4\sqrt{2}$

15. Na figura 4, está representada, num referencial o.n.  $Oxyz$ , parte de um plano  $ABC$

Cada um dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertence a um eixo coordenado.

O plano  $ABC$  é definido pela equação

$$6x + 3y + 4z = 12$$

Seja  $r$  a recta que passa no ponto  $A$  e é perpendicular ao plano  $ABC$

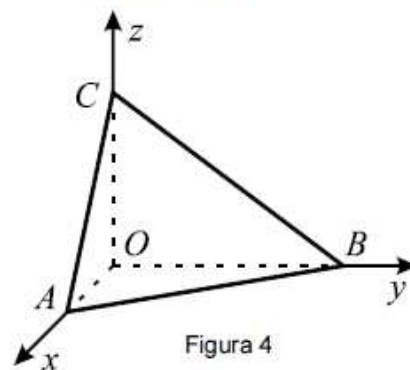


Figura 4

Determine uma equação vectorial da recta  $r$

16. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a superfície esférica  $E$ , de equação

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$$

Para um certo valor de  $\alpha$  pertencente ao intervalo  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , o ponto  $P$ , de coordenadas  $(\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{sen} \alpha, 2 + \cos \alpha)$ , pertence à superfície esférica  $E$

Determine os valores numéricos das coordenadas do ponto  $P$



17. Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , as rectas  $r$  e  $s$ , definidas, respectivamente, por:

$$r : (x, y) = (1, 3) + k(2, 0), \quad k \in \mathbb{R} \qquad s : y = \frac{3}{4}x + 1$$

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo destas duas rectas (valor arredondado às unidades)?

- (A)  $37^\circ$                       (B)  $39^\circ$                       (C)  $41^\circ$                       (D)  $43^\circ$

18. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a recta  $r$  e o plano  $\alpha$ , definidos, respectivamente, por:

$$r : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \qquad \alpha : 3x - z = 0$$

Qual é a intersecção da recta  $r$  com o plano  $\alpha$ ?

- (A) É o ponto  $(0, 2, 3)$  (B) É o ponto  $(0, 0, 0)$  (C) É o conjunto vazio (D) É a recta  $r$

19. Na figura 2, está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência de equação

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

O ponto  $C$  é o centro da circunferência.

- 19.1. O ponto  $A$ , de coordenadas  $(0, -2)$ , pertence à circunferência.

A recta  $t$  é tangente à circunferência no ponto  $A$

Determine a equação reduzida da recta  $t$

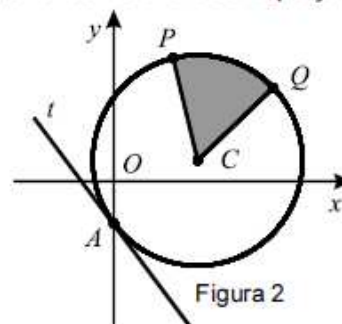


Figura 2

- 19.2.  $P$  e  $Q$  são dois pontos da circunferência. A área da região sombreada é  $\frac{25\pi}{6}$ .  
Determine o valor do produto escalar  $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ}$

20. Na figura 3, está representada, num referencial o.n.  $Oxyz$ , uma pirâmide quadrangular regular  $[ABCDV]$  cuja base está contida no plano  $xOy$

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$
- o ponto  $B$  tem coordenadas  $(5, 3, 0)$
- o ponto  $V$  pertence ao plano de equação  $z = 6$
- $6x + 18y - 5z = 24$  é uma equação do plano  $ADV$
- $18x - 6y + 5z = 72$  é uma equação do plano  $ABV$

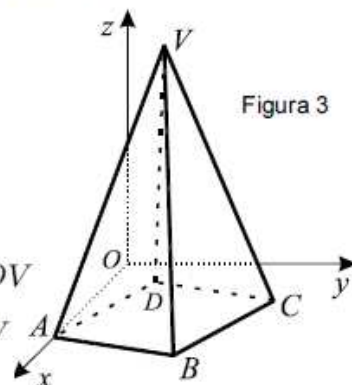


Figura 3

20.1. Determine o volume da pirâmide.

20.2. Determine as coordenadas do ponto  $V$ , sem recorrer à calculadora.

20.3. Seja  $S$  o ponto de coordenadas  $(-1, -15, 5)$

Seja  $r$  a recta que contém o ponto  $S$  e é perpendicular ao plano  $ADV$

Averigüe se a recta  $r$  contém o ponto  $B$

21. Na figura 4 está representado um referencial o.n.  $Oxyz$ .

Cada um dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertence a um eixo coordenado.

O ponto  $P$  pertence ao plano  $ABC$ .

O ponto  $P$  desloca-se no plano  $ABC$ , de tal modo que é sempre vértice de um prisma quadrangular regular, em que os restantes vértices pertencem aos planos coordenados.

O plano  $ABC$  é definido pela equação

$$x + 2y + 3z = 9$$

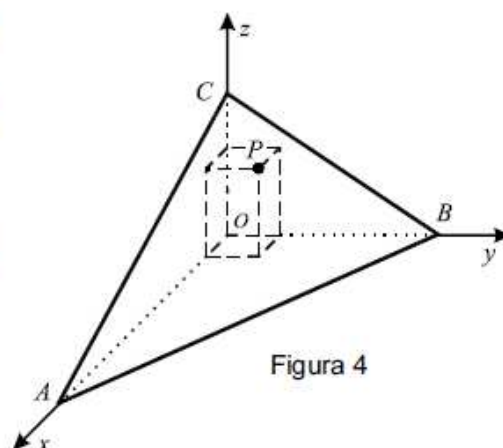


Figura 4

21.1. Seja  $a$  a abcissa do ponto  $P$  ( $a \in ]0, 3[$ )

Mostre que o volume do prisma é dado, em função de  $a$ , por  $V(a) = 3a^2 - a^3$

21.2. Estude a função  $V$  quanto à monotonia, sem recorrer à calculadora, e conclua qual é o valor de  $a$  para o qual o volume do prisma é máximo.

21.3. Seja  $r$  a recta que contém o ponto  $A$  e é perpendicular ao plano  $ABC$ . Determine uma equação vectorial da recta  $r$ .



22. Seja  $[AB]$  o diâmetro de uma esfera de centro  $C$  e raio 5.

Qual é o valor do produto escalar  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  ?

- (A)  $-25$       (B)  $-5\sqrt{2}$       (C)  $5\sqrt{2}$       (D)  $25$

23. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a superfície esférica de equação

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$$

A intersecção desta superfície com o plano  $xOy$  é

- (A) o conjunto vazio      (B) um ponto      (C) uma circunferência      (D) um círculo

24. Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , a recta  $r$  de equação  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$

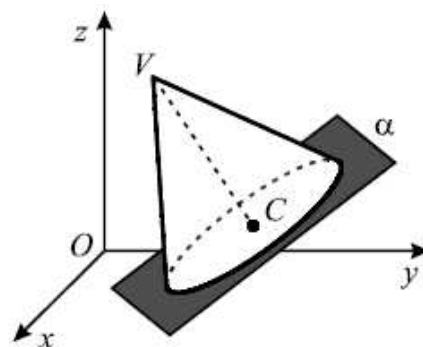
Seja  $s$  a recta perpendicular a  $r$  que passa no ponto de coordenadas  $(1, 4)$

Qual é a equação reduzida da recta  $s$  ?

- (A)  $y = 2x + 2$       (B)  $y = -2x + 6$       (C)  $y = -2x + \frac{5}{3}$       (D)  $y = 2x +$

25. Na figura está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um cone de revolução. Sabe-se que:

- a base do cone está contida no plano  $\alpha$  de equação  $x + 2y - 2z = 11$
- o vértice  $V$  do cone tem coordenadas  $(1, 2, 6)$
- o ponto  $C$  é o centro da base do cone



- 25.1. Determine uma equação do plano  $\gamma$  que contém o vértice do cone e que é paralelo ao plano  $\alpha$

- 25.2. Seja  $\beta$  o plano definido pela equação  $2x - y + z = 3$   
Averigüe se os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são perpendiculares.

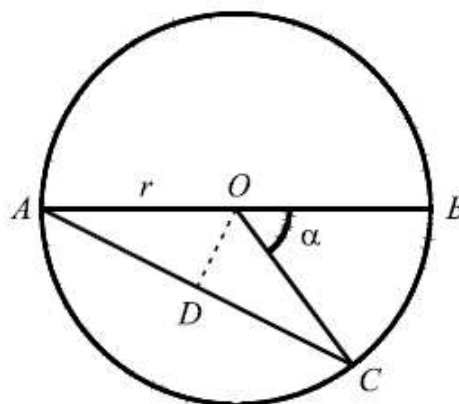
- 25.3. Seja  $W$  o ponto simétrico do ponto  $V$ , em relação ao plano  $xOy$ . Indique as coordenadas do ponto  $W$  e escreva uma condição que defina o segmento de recta  $[VW]$ .

- 25.4. Sabendo que o raio da base do cone é igual a 3, determine o volume do cone.  
**Sugestão:** comece por escrever uma condição que defina a recta que contém o vértice do cone e que é perpendicular ao plano  $\alpha$  e utilize-a para determinar as coordenadas do ponto  $C$ .

26. Na figura está representada uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ .

Sabe-se que:

- $[AB]$  é um diâmetro da circunferência
- O ponto  $C$  pertence à circunferência
- $\alpha$  é a amplitude do ângulo  $COB$
- $[OD]$  é perpendicular a  $[AC]$



Prove que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4r^2 \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)$

Sugestão

Percorra as seguintes etapas:

- Justifique que o triângulo  $[OAC]$  é isósceles
- Justifique que  $\overline{AC} = 2 \overline{AD}$
- Justifique que a amplitude do ângulo  $CAB$  é  $\frac{\alpha}{2}$
- Escreva  $\overline{AD}$ , em função de  $\frac{\alpha}{2}$  e de  $r$
- Conclua que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4r^2 \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)$

27. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a recta  $r$  definida por

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, 0, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Qual das condições seguintes define uma recta paralela à recta  $r$ ?

- (A)  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, 1, 0), \quad k \in \mathbb{R}$     (C)  $x = 2 \wedge y = 1$   
 (B)  $(x, y, z) = (0, 0, 1) + k(1, 2, 3), \quad k \in \mathbb{R}$     (D)  $x = 2 \wedge z = 1$

28. Num referencial o. n.  $Oxyz$ , sejam  $\alpha$  e  $\beta$  os planos definidos pelas equações:

$$\alpha : x + y - z = 1 \quad \text{e} \quad \beta : 2x + 2y - 2z = 1$$

A intersecção dos planos  $\alpha$  e  $\beta$  é

- (A) o conjunto vazio    (B) um ponto    (C) uma recta    (D) um plano

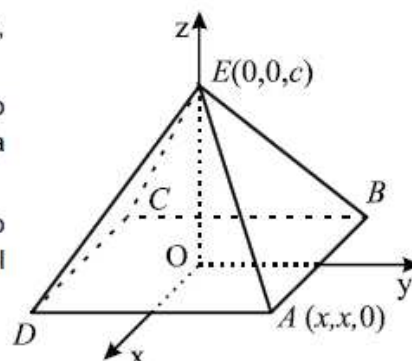
29. Na figura está representada, em referencial o.n.  $Oxyz$ , uma pirâmide quadrangular.

Admita que o vértice  $E$  se desloca no semieixo positivo  $Oz$ , entre a origem e o ponto de cota 6, nunca coincidindo com qualquer um destes dois pontos.

Com o movimento do vértice  $E$ , os outros quatro vértices da pirâmide deslocam-se no plano  $xOy$ , de tal forma que:

- a pirâmide permanece sempre regular
- o vértice  $A$  tem sempre abcissa igual à ordenada
- sendo  $x$  a abcissa de  $A$  e sendo  $c$  a cota de  $E$ , tem-se sempre

$$x + c = 6$$



- 29.1. Seja  $V(x)$  o volume da pirâmide, em função de  $x$  ( $x \in ]0, 6[$ ).

Mostre que  $V(x) = 8x^2 - \frac{4}{3}x^3$

- 29.2. Utilizando a função derivada de  $V$  e recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função  $V$  quanto à monotonia, conclua qual é o valor de  $x$  para o qual é máximo o volume da pirâmide e determine esse volume máximo.

- 29.3. Admita agora que  $x = 1$ . Indique, para este caso, as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $E$  e determine uma equação cartesiana do plano  $ABE$ .

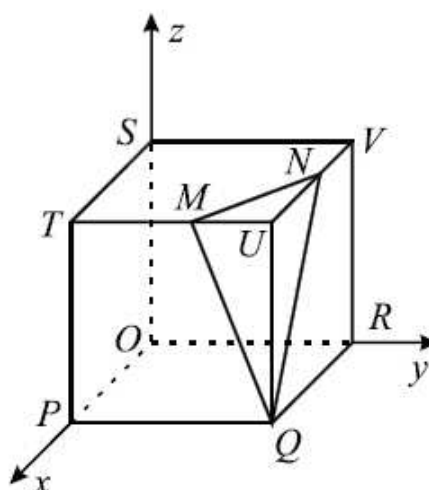
30. Na figura está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um cubo  $[OPQRSTUV]$  de aresta 5

O vértice  $O$  do cubo coincide com a origem do referencial.

Os vértices  $P$ ,  $R$  e  $S$  do cubo pertencem aos semieixos positivos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respectivamente.

O triângulo escaleno  $[MNQ]$  é a secção produzida no cubo pelo plano  $\alpha$  de equação

$$10x + 15y + 6z = 125$$



- 30.1. Escreva uma condição que defina a recta que passa por  $U$  e é perpendicular ao plano  $\alpha$

- 30.2. Seja  $\beta$  a amplitude, em graus, do ângulo  $MQN$ . Determine  $\beta$   
 Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

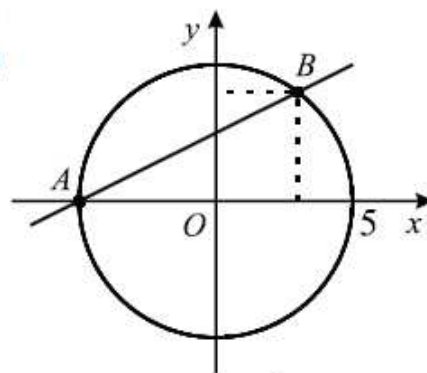
**Sugestão:** comece por determinar as coordenadas dos pontos  $M$  e  $N$



31. Na figura estão representadas, em referencial o.n.  $xOy$ , uma recta  $AB$  e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5

Os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à circunferência.

O ponto  $A$  também pertence ao eixo das abcissas.



- 31.1. Admitindo que o declive da recta  $AB$  é igual a  $\frac{1}{2}$ , resolva as três alíneas seguintes:

31.1.1. Mostre que uma equação da recta  $AB$  é  $x - 2y + 5 = 0$

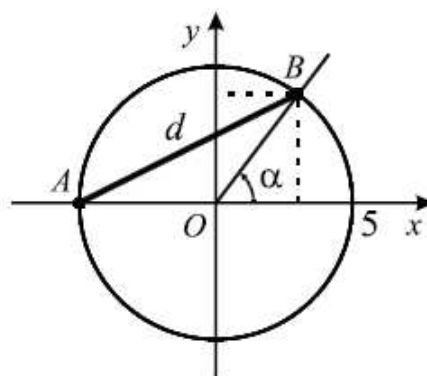
31.1.2. Mostre que o ponto  $B$  tem coordenadas  $(3, 4)$

31.1.3. Seja  $C$  o ponto de coordenadas  $(-3, 16)$   
Verifique que o triângulo  $[ABC]$  é rectângulo em  $B$

- 31.2. Admita agora que o ponto  $B$  se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.

Para cada posição do ponto  $B$ , seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo  $Ox$  e cujo lado extremidade é a semi-recta  $\vec{OB}$

Seja  $d$  o comprimento do segmento  $[AB]$



31.2.1. Mostre que  $d^2 = 50 + 50 \cos \alpha$

31.2.2. Para uma certa posição do ponto  $B$ , tem-se  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{24}$

Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de  $d$

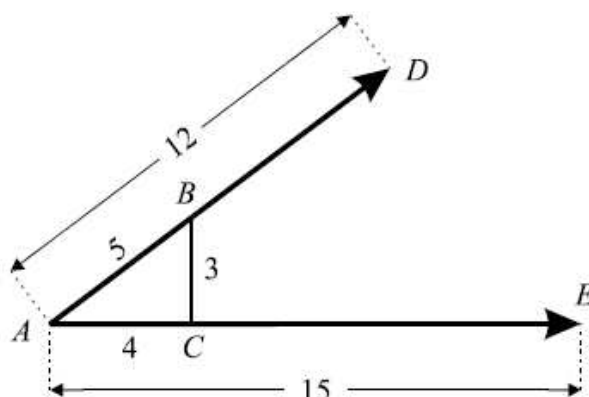
32. Na figura estão representados dois vectores,  $\overrightarrow{AD}$  e  $\overrightarrow{AE}$ , de normas 12 e 15, respectivamente.

No segmento de recta  $[AD]$  está assinalado um ponto  $B$ .

No segmento de recta  $[AE]$  está assinalado um ponto  $C$ .

O triângulo  $[ABC]$  é rectângulo e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento.

Indique o valor do produto escalar  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$



- (A) 108                      (B) 128                      (C) 134                      (D) 144

33. Considere, em referencial o.n.  $Oxyz$ , o ponto  $P(0, 4, 3)$

33.1. Seja  $\alpha$  o plano que contém o ponto  $P$  e é perpendicular à recta de equação vectorial  $(x, y, z) = (0, 1, -3) + k(1, 0, 2)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

Determine a área da secção produzida pelo plano  $\alpha$  na esfera definida pela condição  $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 \leq 3$ .

*Sugere-se que:*

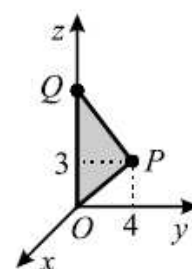
- Determine uma equação do plano  $\alpha$ .
- Mostre que o centro da esfera pertence ao plano  $\alpha$ .
- Atendendo ao ponto anterior, determine a área da secção.

33.2. Admita que um ponto  $Q$  se desloca ao longo do semieixo positivo  $Oz$ , nunca coincidindo com a origem  $O$  do referencial.

Seja  $f$  a função que faz corresponder, à cota  $z$  do ponto  $Q$ , o perímetro do triângulo  $[OPQ]$ .

33.2.1. Mostre que  $f(z) = z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25}$

33.2.2. Sem recorrer à calculadora, determine a cota do ponto  $Q$  de modo que o perímetro do triângulo  $[OPQ]$  seja igual a 16.





34.

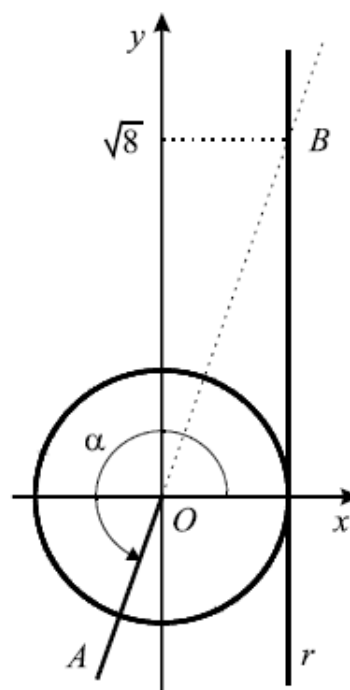
34.1. Na figura junta estão representados, em referencial o. n.  $xOy$ :

- o círculo trigonométrico
- a recta  $r$ , de equação  $x = 1$
- o ângulo, de amplitude  $\alpha$ , que tem por lado origem o semieixo positivo  $Ox$  e por lado extremidade a semi-recta  $\dot{OA}$
- o ponto  $B$ , intersecção do prolongamento da semi-recta  $\dot{OA}$  com a recta  $r$ .

Como a figura sugere, a ordenada de  $B$  é  $\sqrt{8}$

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de

$$5 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 2 \cos (3\pi - \alpha)$$



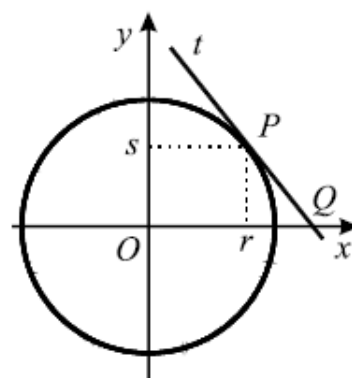
34.2. Considere agora um ponto  $P$ , do primeiro quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro na origem e raio 1.

Sejam  $(r, s)$  as coordenadas do ponto  $P$ .

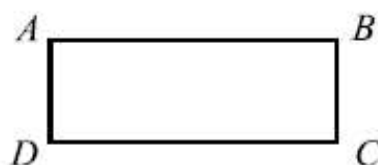
Seja  $t$  a recta tangente à circunferência no ponto  $P$ .

Seja  $Q$  o ponto de intersecção da recta  $t$  com o eixo  $Ox$ .

Prove que a abcissa do ponto  $Q$  é  $\frac{1}{r}$



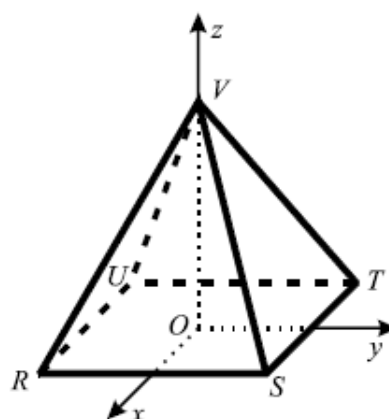
35. Na figura está representado um rectângulo  $[ABCD]$ .



Mostre que o produto escalar  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  é igual a  $\overline{AB}^2$

36. Na figura está representada, em referencial o.n.  $Oxyz$ , uma pirâmide regular. Sabe-se que:

- a base  $[RSTU]$  é um quadrado de área 4 com centro na origem do referencial;
- a aresta  $[RS]$  é paralela ao eixo  $Oy$ ;
- o vértice  $V$  tem coordenadas  $(0, 0, 2)$ .

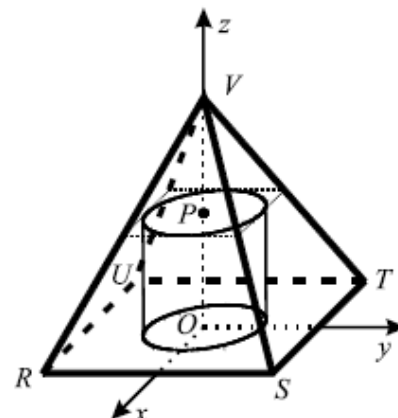


- 36.1. Mostre que a recta definida pela condição  $x = 0 \wedge y = 2z$  é perpendicular ao plano  $STV$  e escreva uma equação deste plano.

- 36.2. Considere agora um ponto  $P$  que se desloca ao longo do segmento  $[OV]$ , nunca coincidindo com o ponto  $O$ , nem com o ponto  $V$ .

Para cada posição do ponto  $P$  considere o cilindro tal que:

- a base inferior do cilindro tem centro na origem do referencial e está contida no plano  $xOy$ ;
- a base superior do cilindro tem centro no ponto  $P$  e está inscrita no quadrado que é a secção produzida na pirâmide pelo plano paralelo ao plano  $xOy$  que passa no ponto  $P$ .



Seja  $z$  a cota do ponto  $P$  e seja  $f$  a função que dá o volume do cilindro, em função de  $z$ .

- 36.2.1. Justifique que o domínio da função  $f$  é o intervalo  $]0, 2[$  e que

$$f(z) = \pi \left( \frac{z^3}{4} - z^2 + z \right)$$

- 36.2.2. Considere o seguinte problema:

*Entre que valores deve variar a cota do ponto  $P$  de tal modo que o volume do cilindro seja superior à quinta parte do volume da pirâmide?*

Traduza o problema por meio de uma inequação e, utilizando a sua calculadora, resolva-a **graficamente**.

Apresente os valores pedidos arredondados às milésimas.

Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.