Matemática 11.º ano.

Funções reais de variável real

Compilação de exercícios de funções saídos em provas oficiais (Testes Intermédios) desde 2006.

Todos os exercícios estão resolvidos em vídeo em www.explicamat.pt

Teste Intermédio Março de 2013

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, definida por $f(x)=\frac{1}{x+1}$

Considere a função g definida por $g(x)=f(x+a)+k$, com $a\in\mathbb{R}$ e $k\in\mathbb{R}$

Sabe-se que as retas de equações $x=-2$ e $y=2$ são assíntotas do gráfico de g

Quais são os valores de a e de k?

(A) $a=1$ e $k=-2$ **(B)** $a=1$ e $k=2$ **(C)** $a=-1$ e $k=-2$ **(D)** $a=-1$ e $k=2$

Teste Intermédio Março de 2013

2. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- as funções f e g são funções quadráticas
- a função f tem dois zeros distintos
- a função g tem um único zero
- os gráficos das funções f e g intersectam-se no ponto de coordenadas $(3, 0)$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função $f\times g$ tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.

(B) A função $f\times g$ tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem dois zeros.

(C) A função $f\times g$ tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.

(D) A função $f\times g$ tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem dois zeros.

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

As retas de equações $x=2$ e $y=-1$ são as assíntotas do gráfico da função f

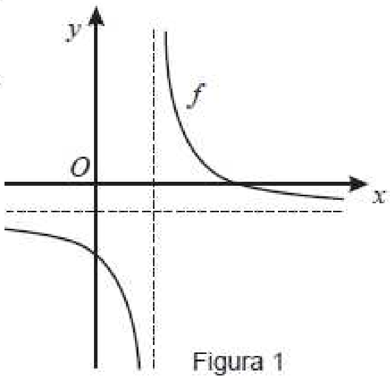


Figura 1

3.1. Responda aos dois itens seguintes sem apresentar cálculos.

3.1.1. Qual é o valor de k para o qual a equação $f(x)=k$ é impossível?

3.1.2. Qual é o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$?

3.2. Admita agora que a função f é definida pela expressão $f(x)=\dfrac{6-x}{x-2}$

3.2.1. Resolva analiticamente a condição $f(x)\leq\dfrac{4-x}{x+2}$

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

3.2.2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=x^3$

A equação $(f\circ g)(x)=x$ tem exatamente duas soluções.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, essas soluções.

Apresente as soluções arredondadas às centésimas.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);
- assinalar os pontos relevantes para responder à questão colocada.

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f

As retas de equações $x=2$ e $y=1$ são as assíntotas do gráfico da função f

Para um certo número real k, a função g, definida por $g(x)=f(x)+k$, não tem zeros.

Qual é o valor de k ?

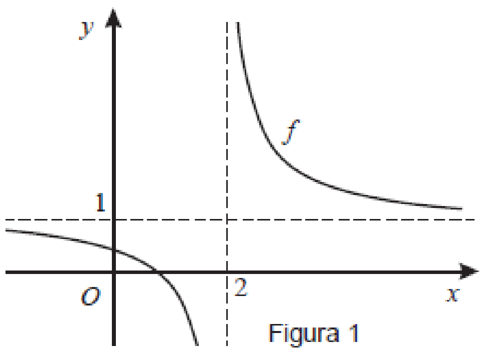


Figura 1

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** -2 **(D)** 2

5. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f

O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1

As retas de equações $x = 1$ e $y = -2$ são as assíntotas do gráfico da função f

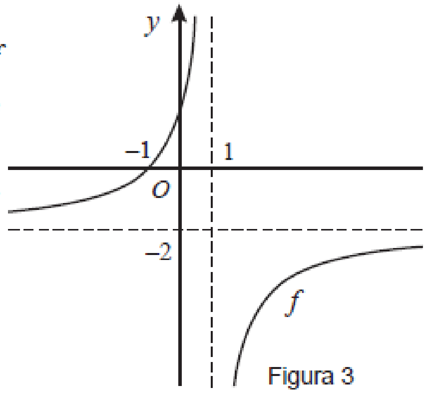


Figura 3

5.1. Responda aos dois itens seguintes sem efetuar cálculos, ou seja, recorrendo apenas à leitura do gráfico.

5.1.1. Indique o contradomínio da função f

5.1.2. Apresente, usando a notação de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$

5.2. Defina, por uma expressão analítica, a função f

6. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + 1$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$

Para um certo número real a, tem-se $(g \circ h)(a) = \frac{1}{9}$

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

Qual é o valor de a ?

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10

7. Sejam f e g duas funções reais de variável real.

Sabe-se que:

- a função f tem domínio $\mathbb{R}$ e tem cinco zeros;
- a função g tem domínio $\mathbb{R}$ e tem três zeros;
- um, e só um, dos zeros da função f também é zero da função g

Quantos zeros tem a função $\frac{f}{g}$?

(A) 7 **(B)** 5 **(C)** 4 **(D)** 2

8. Uma floresta foi atingida por uma praga.

Admita que a área, em **milhares** de hectares, da região afectada por essa praga é dada por

$A(t) = \dfrac{2t}{t^2+3} \quad (t \geq 0)$

(Considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao início da praga.)

8.1. Houve um certo intervalo de tempo durante o qual a área da região afectada pela praga foi, pelo menos, de 500 hectares. Nesse intervalo de tempo, a floresta esteve seriamente ameaçada.
Durante quanto tempo esteve a floresta seriamente ameaçada?

Na sua resposta deve:

- escrever uma inequação que lhe permita resolver o problema;
- resolver analiticamente essa inequação;
- apresentar o valor pedido.

8.2. **Utilize as capacidades gráficas da calculadora** para resolver o seguinte problema:

Ao fim de quanto tempo, contado a partir do início da praga, foi máximo o valor da área atingida por essa praga?

Na sua resposta deve:

- reproduzir o gráfico visualizado na calculadora;
- assinalar, no gráfico, o ponto relevante para a resolução do problema e indicar as coordenadas desse ponto, arredondadas às milésimas;
- apresentar a solução do problema em dias, arredondada às unidades (considere 1 ano = 365 dias).

9. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura 2.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = -x + 3$$

Qual é o valor de $(g \circ f)(3)$?

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

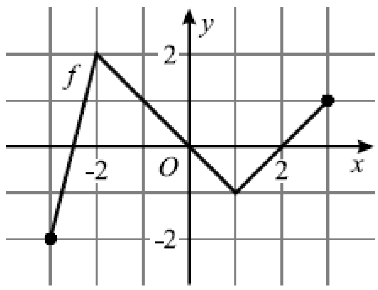


Figura 2

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

10. Num certo ecossistema habitam as espécies animais A e B.

Admita que, t anos após o início do ano 2009, o número de animais, em **milhares**, da espécie A é dado aproximadamente por

$$a(t) = \frac{11t+6}{t+1} \qquad (t \geq 0)$$

e que o número de animais, em **milhares**, da espécie B é dado aproximadamente por

$$b(t) = \frac{t+9}{t+3} \qquad (t \geq 0)$$

Resolva os dois itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

10.1. Desde o início do ano 2009 até ao início do ano 2010, morreram 500 animais da espécie A.

Determine quantos animais dessa espécie nasceram nesse intervalo de tempo.

10.2. Na figura 5, estão representadas graficamente as funções a e b

Tal como estes gráficos sugerem, a **diferença** entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B vai aumentando, com o decorrer do tempo, e tende para um certo valor.

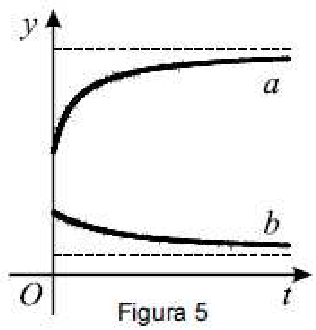


Figura 5

Determine esse valor, recorrendo às assimptotas horizontais dos gráficos das funções a e b, cujas equações deve apresentar.

11. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura 2.

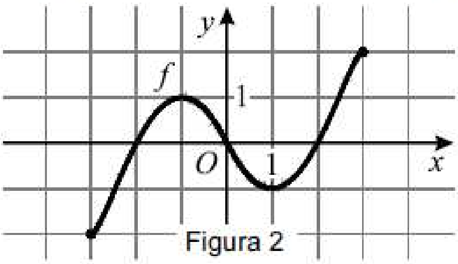


Figura 2

Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = -2x+1$

Qual é o valor de $(f \circ g)(2)$? (o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

12. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por $f(x) = 4 - \frac{4}{x+2}$

Sem recorrer à calculadora, resolva os itens seguintes:

12.1. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \geq 3$

Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

12.2. Na figura 3 estão representados, em referencial o.n. xOy:

- parte do gráfico da função f
- as rectas r e s, assimptotas do gráfico de f
- o quadrilátero $[ABCD]$

A e B são os pontos de intersecção do gráfico da função f com os eixos coordenados.

C é o ponto de intersecção das rectas r e s.

D é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Oy.

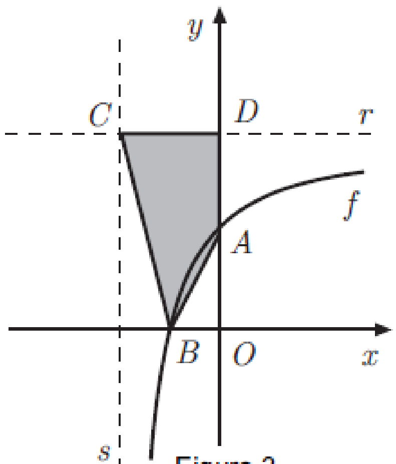
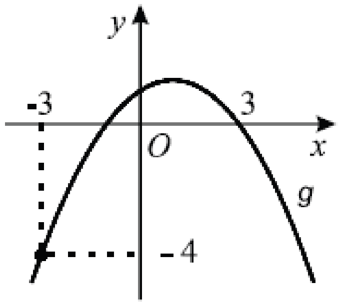


Figura 3

Determine a área do quadrilátero $[ABCD]$

13. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g



Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$

Qual é o valor de $(f \circ g)(-3)$?

(A) -4 **(B)** 0 **(C)** 3 **(D)** 4

14. Na empresa onde o Manuel trabalha, o cumprimento do horário é controlado por relógio electrónico. De acordo com o contrato de trabalho, qualquer trabalhador deve entrar às oito horas e sair ao meio-dia. Porém, se o trabalhador chegar atrasado, terá de continuar a trabalhar depois do meio-dia.

Sempre que um trabalhador chega t minutos atrasado, o número de minutos, depois do meio-dia, que ele tem de permanecer na empresa é dado por

$$c(t) = \frac{t^2 + 25\,t}{t+1} \qquad (t \geq 0)$$

14.1. Na segunda-feira, o Manuel entrou na empresa às nove horas e um quarto.

A que horas deveria ter saído, de modo a cumprir o estipulado no contrato?

Apresente a sua resposta em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

14.2. Ontem, o Manuel saiu da empresa às 12 horas e 25 minutos.

Com quantos minutos de atraso é que ele chegou à empresa?

14.3. Ao sair ontem da empresa, o Manuel pensou: «*Então eu atrasei-me tão pouco e tive de ficar a trabalhar quase meia hora depois do meio-dia?! Não é justo.*»

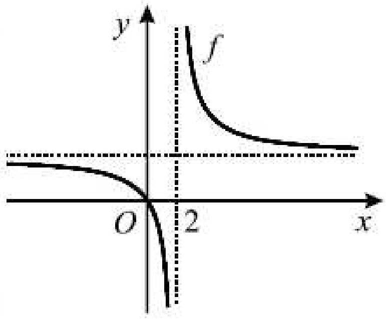
Depois de ter conversado com os seus colegas de trabalho, o Manuel decidiu propor à administração da empresa que o tempo de permanência de um trabalhador na empresa, após o meio-dia, passasse a ser igual ao tempo de atraso, acrescido de 40% desse tempo (por exemplo, um atraso de 10 minutos deve ser compensado com 14 minutos de trabalho depois do meio-dia).

Numa pequena composição, compare a proposta do Manuel com o contrato em vigor, contemplando os seguintes tópicos:

- justifique que, de acordo com a proposta do Manuel, o número de minutos depois do meio-dia que um trabalhador terá de permanecer na empresa, quando se atrasa t minutos, é dado por $p(t) = 1{,}4\,t$;
- refira se a proposta do Manuel é, ou não, sempre mais favorável ao trabalhador do que o contrato em vigor;
- considerando que, para um certo atraso, a proposta do Manuel e o contrato em vigor determinam o mesmo tempo de permanência na empresa, após o meio-dia, refira:
  - o atraso;
  - o tempo de permanência, depois do meio-dia, que esse atraso determina.

Utilize a calculadora *para comparar os gráficos das duas funções (c e p); transcreva para a sua folha de prova esses gráficos e assinale o ponto relevante que lhe permite responder a algumas das questões colocadas, bem como as suas coordenadas, arredondadas às unidades.*

15. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, bem como as duas assimptotas deste gráfico.



Tal como a figura sugere,

- a origem do referencial pertence ao gráfico de f
- uma das assimptotas é paralela ao eixo Ox
- a outra assimptota é paralela ao eixo Oy e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 2

15.1. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3x + 9$

Tendo em conta o gráfico de f e a expressão analítica de g, **resolva** a inequação $f(x) \times g(x) \leq 0$, **completando** a seguinte tabela de variação de sinal, que deve **transcrever** para a sua folha de prova:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	
$g(x)$	
$f(x) \times g(x)$	

Apresente o **conjunto solução** da inequação utilizando a notação de intervalos de números reais.

15.2. Admita agora que:

- a assimptota do gráfico de f paralela ao eixo das abcissas tem equação $y = 3$
- f é definida por uma expressão do tipo $f(x) = a + \dfrac{b}{x-c}$ onde a, b e c designam números reais.

Indique os valores de a e de c e determine o valor de b.

Teste Intermédio Maio de 2008

16. A Maria vai sempre de carro, com o pai, para a escola, saindo de casa entre as sete e meia e as oito horas da manhã.
Admita que, quando a Maria sai de casa t minutos **depois das sete e meia**, a duração da viagem, em **minutos**, é dada por

$$d(t) = 45 - \frac{5600}{t^2 + 300} \qquad (\, t \in [0, 30] \,)$$

As aulas da Maria começam sempre às oito e meia.

16.1. Mostre que, se a Maria sair de casa às 7 h 40 m, chega à escola às 8 h 11 m, mas, se sair de casa às 7 h 55 m, já chega atrasada às aulas.

16.2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, resolva o seguinte problema: *Até que horas pode a Maria sair de casa, de modo a não chegar atrasada às aulas?*

A sua resolução deve incluir:

- uma explicação de que, para que a Maria não chegue atrasada às aulas, é necessário que $t + d(t) \leq 60$
- o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora
- a resposta ao problema em horas e minutos (minutos arredondados às unidades)

17. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ define a função f cujo gráfico está parcialmente representado na figura.

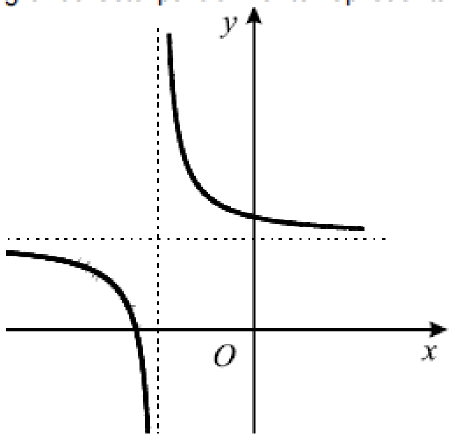
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a > 0 \ \wedge \ b > 0$

(C) $a < 0 \ \wedge \ b > 0$

(B) $a > 0 \ \wedge \ b < 0$

(D) $a < 0 \ \wedge \ b < 0$

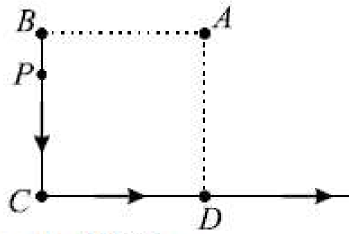


18. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\frac{x^2+1}{2-x} < 0$

(A) $]-1, 2[$ **(B)** $]1, 2[$ **(C)** $]-\infty, 2[$ **(D)** $]2, +\infty[$

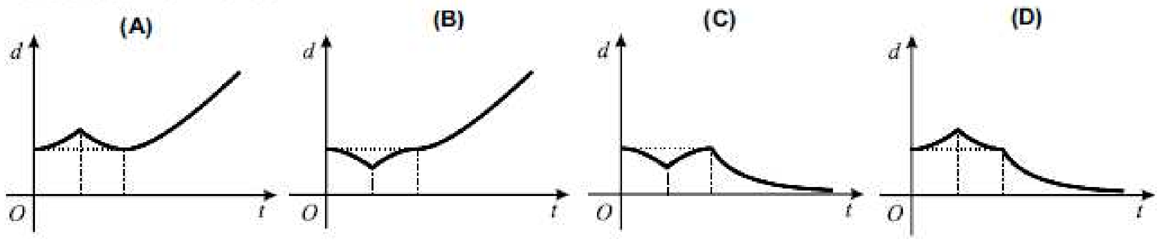
19. Na figura estão representados:

- um quadrado $[ABCD]$
- uma semi-recta $\dot{C}D$



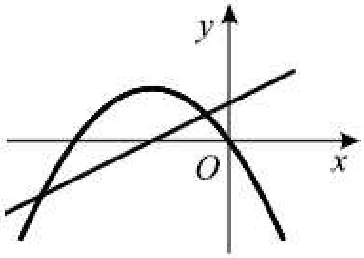
Admita que um ponto P, partindo de B, se desloca, a velocidade constante, ao longo do percurso sugerido pelas setas (primeiro percorre o segmento $[BC]$ e seguidamente a semi-recta $\dot{C}D$).

Qual dos gráficos seguintes dá a distância d, do ponto P ao ponto A, em função do tempo t, contado a partir do instante em que P inicia o seu movimento?



20. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função quadrática f;
- parte do gráfico de uma função afim g.



Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$?

(A) $]-\infty, -4[\cup [-2, 0[$ **(B)** $]-\infty, -4] \cup]-2, 0]$

(C) $]-4, -2] \cup]0, +\infty[$ **(D)** $[-4, -2[\cup [0, +\infty[$

21. Na figura 1 está representada graficamente a função f.
Na figura 2 está representada graficamente a função g.

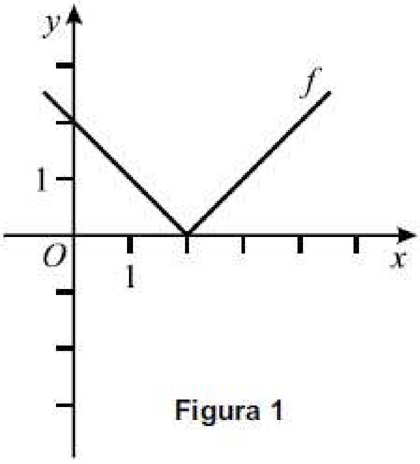


Figura 1

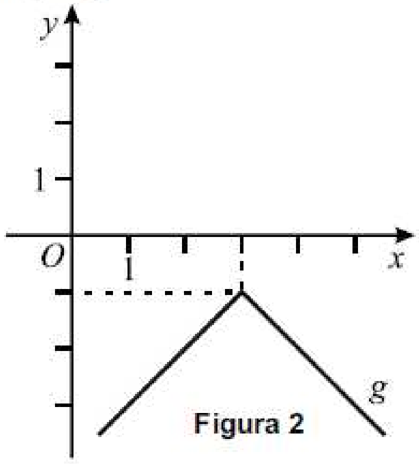


Figura 2

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $g(x) = -f(x+1) - 1$ **(B)** $g(x) = f(x-1) + 1$

(C) $g(x) = f(x+1) - 1$ **(D)** $g(x) = -f(x-1) - 1$

22. De uma função quadrática f sabe-se que o conjunto solução da inequação $f(x) \geq 0$ é o intervalo $[1, 5]$.
Qual é o contradomínio de f ?

(A) $]-\infty, f(1)]$ **(B)** $[f(5), +\infty[$

(C) $[f(3), +\infty[$ **(D)** $]-\infty, f(3)]$